Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

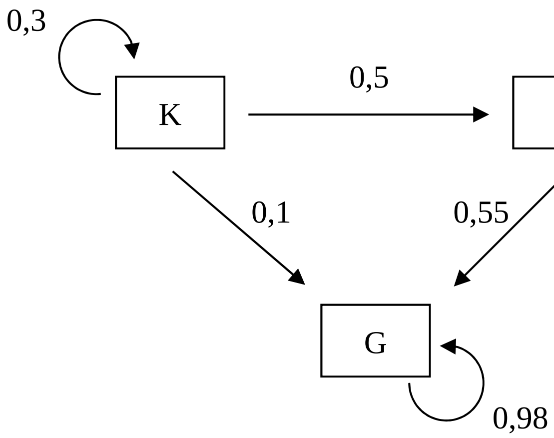
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



$$
\begin{array}{lcc}
 & \textit{von:} & \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{M} & \text{G} \end{array} \\
\textit{nach:} & & \\
\begin{array}{l} \text{K} \\ \text{M} \\ \text{G} \end{array} & \boldsymbol{W} = & \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,55 & 0,98 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Modelllösung b)

(1) $\begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112,5 \\ 2641,5 \\ 6746 \end{pmatrix}$

Nach einer Wachstumsperiode sind etwa 113 Tannen der Größenklasse K, 2642 Tannen der Größenklasse M und 6746 Tannen der Größenklasse G vorhanden. [Auch andere sinnvolle Rundungen werden akzeptiert.]

(2) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Bestandsvektor eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme.

Zu lösen ist die Gleichung $\begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich: $x_1 = 1800$, $x_2 = 5400$, $x_3 \approx 3326$.

Eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme gehörten 1800 Tannen zur Größenklasse K, 5400 Tannen zur Größenklasse M und rund 3326 Tannen zur Größenklasse G.

(3) Nach einer Wachstumsperiode folgt aus

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}$$

ein Gesamtbestand von $(0,25+0,7)\cdot x_1 + (0,55+0,4)\cdot x_2 + 0,95\cdot x_3 = 0,95\cdot(x_1+x_2+x_3)$.

Somit beträgt der Gesamtbestand nach einer Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes.

[Auch die Spaltensummen der Matrix ***A*** können betrachtet werden.]

(4) Es gilt: $0,95^n < 0,6 \Leftrightarrow n\cdot\ln(0,95) < \ln(0,6) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} \approx 9,96$.

Nach 10 Wachstumsperioden sind erstmals weniger als 60 % der ursprünglichen Gesamtzahl an Bäumen vorhanden.

[Auch die Lösung anhand eines konkreten Beispiels wird akzeptiert.]

Modelllösung c)

(1) Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestandsvektor

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}.$$

Da 56 % des Bestandes der Größenklasse G am Ende der Wachstumsperiode gefällt werden, ist die verbleibende Anzahl von Tannen dieser Größenklasse:

$0,44\cdot(0,4x_2 + 0,95x_3) = 0,176x_2 + 0,418x_3$.

Damit ergibt sich als Bestandsvektor nach dem Fällen: $\begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,176x_2 + 0,418x_3 \end{pmatrix}$.

(2) Die Anzahl der Tannen, die in der Größenklasse K neu gesetzt werden, beträgt

$0{,}56\cdot\left(0{,}4x_2+0{,}95x_3\right)=0{,}224x_2+0{,}532x_3$, so dass sich als Bestandsvektor nach dem Wiederaufforsten

$$\begin{pmatrix}0{,}25x_1+0{,}224x_2+0{,}532x_3\\0{,}7x_1+0{,}55x_2\\0{,}176x_2+0{,}418x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25&0{,}224&0{,}532\\0{,}7&0{,}55&0\\0&0{,}176&0{,}418\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

und als Übergangsmatrix $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0{,}25&0{,}224&0{,}532\\0{,}7&0{,}55&0\\0&0{,}176&0{,}418\end{pmatrix}$ ergibt.

(3) Wenn in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt werden, wie zuvor in der Größenklasse G gefällt wurden, beträgt der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode wieder 95 % des Anfangsbestandes, weil sich an der Gesamtsituation gegenüber Aufgabenteil b) (3) nichts geändert hat.

(4) Damit der Bestand zahlenmäßig erhalten bleibt, müssten zusätzlich zu den

$0{,}56\cdot\left(0{,}4x_2+0{,}95x_3\right)=0{,}224x_2+0{,}532x_3$ Tannen aus (2) weitere $0{,}05\cdot\left(x_1+x_2+x_3\right)$

Tannen gesetzt werden, insgesamt also

$0{,}224x_2+0{,}532x_3+0{,}05\cdot\left(x_1+x_2+x_3\right)=0{,}05x_1+0{,}274x_2+0{,}582x_3$ Tannen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	stellt das Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar.	5
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach einer Wachstumsperiode.	4
2	(2) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen eine Wachstumsperiode vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.	6
3	(3) zeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen nach einer Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes beträgt.	5
4	(4) berechnet, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes vorhanden sind.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen und vor dem Aufforsten vorhanden sind.	4
2	(2) bestimmt, wie viele Tannen neu gepflanzt werden.	4
3	(2) zeigt, dass die Matrix ***C*** die angegebene Form hat.	4
4	(3) begründet, dass der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.	3
5	(4) bestimmt, wie viele Tannen insgesamt neu gesetzt werden müssten, damit die Anzahl der Tannen am Ende einer Wachstumsperiode gleich der Anzahl der Tannen zu Beginn dieser Wachstumsperiode ist.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	stellt das Wachstumsverhalten …	5			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Anzahl …	4			
2	(2) bestimmt die Anzahl …	6			
3	(3) zeigt, dass der …	5			
4	(4) berechnet, nach wie …	5			
sachlich richtige Alternativen: (20) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, wie viele …	4			
2	(2) bestimmt, wie viele …	4			
3	(2) zeigt, dass die …	4			
4	(3) begründet, dass der …	3			
5	(4) bestimmt, wie viele …	5			
sachlich richtige Alternativen: (20) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**20**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0